УДК 519.718
DOI: 10.15587/1729-4061.2021.239149

Впровадження методу образних перетворень для мінімізації симетричних булевих функцій

М. Т. Соломко, П. О. Тадеєв, Л. В. Зубик, С. М. Бабич, Ю. А. Мала, О. П. Войтович

Проведеними дослідженнями встановлена можливість збільшення ефективності методу образних перетворень для мінімізації симетричних булевих функцій в основному та поліномному базисах. Виявлено перспективні резерви аналітичного методу, як то спрощення кон'юнктермів поліномних функцій за допомогою створених рівносильних перетворень на основі методу вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Поширення методу образних перетворень на процес мінімізації симетричних булевих функцій здійснено за допомогою алгебри у частині правил спрощення функцій основного та поліномного базисів та розроблених рівносильних перетворень кон'юнктермів. Встановлено, що спрощення симетричних булевих функцій методом образних перетворень ґрунтується на блок-схемі з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це є достатнім ресурсом для мінімізації симетричних булевих функцій та дозволяє обходитись без допоміжних об'єктів, як то Карти Карно, куби та ін.

Досконалу нормальну форму симетричних функцій можна подати бінарними матрицями, які будуть представляти терми симетричних булевих функцій та операцію OR або XOR для них.

Експериментальними дослідженнями підтверджено, що метод образних перетворень, який використовує комбінаторні системи 2-(n, b)-design та 2-(n, x/b)-design підвищує ефективність мінімізації симетричних булевих функцій. У порівнянні з аналогами це дає змогу підвищити продуктивність мінімізації симетричних булевих функцій на 100–200 %.

Є підстави стверджувати про можливість збільшення ефективності мінімізації симетричних булевих функцій в основному та поліномному базисах методом образних перетворень. Це забезпечується, зокрема шляхом використання розроблених рівносильних перетворень кон'юнктермів поліномних функцій на основі методу вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Ключові слова: мінімізація симетричних булевих функцій методом образних перетворень, сингулярна функція, основний базис.

1. Вступ

З огляду на практичну доцільність, як правило надають перевагу спеціальним класам булевих функцій, зокрема симетричним функціям (СФ) [1–3]. Завдяки своїм широким функціональним можливостям симетричні функції моделюють чималу кількість обчислювальних компонентів, зокрема, n-входові 1-

розрядні суматори бінарних кодів чи схеми (не)парності, компаратори, пристрої виявлення помилок, декодери завадостійких кодів тощо. З іншого боку, для синтезу симетричних функцій можна використати спеціальні, не властиві у загальному випадку часткові підходи, які переважно дають кращі результати щодо реалізації цифрових компонентів [4–6].

Важливість таких функцій вперше було визнано у роботі [1], де були введені основні поняття, визначення та розглянуті властивості СФ. Для практики інтерес викликають задачі декомпозиції СФ і задачі синтезу оптимальних логічних схем на їх основі [7–14].

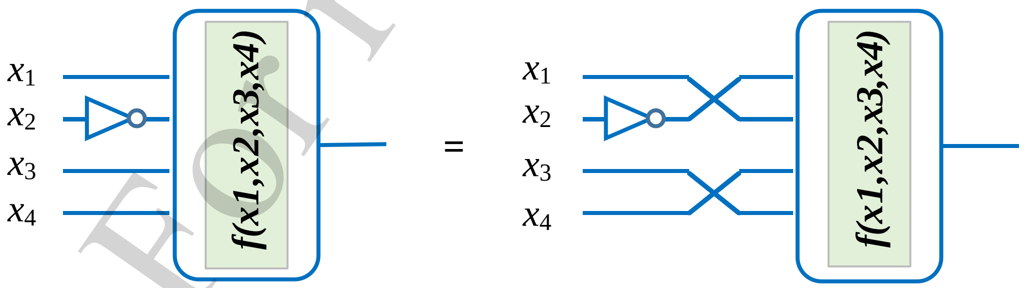
Булева функція $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є симетричною відносно змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, якщо для будь-якої підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots k \\ x_1 & x_2 \ldots k \end{pmatrix}$$

буде справедлива рівність

$$f\left(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n\right)=f\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k},x_{j_{k+1}},\ldots,x_{j_n}\right).$$

Зазвичай симетрія стосується перестановок параметрів об’єктів, які залишають його незмінним. Вони дають уявлення про структуру об’єкта, який може бути використаний для полегшення обчислень на ньому. Перестановки також можуть слугувати орієнтиром для збереження цієї структури, коли об’єкт певним чином трансформується. Таким чином симетрія для булевих функцій є перестановки змінних з можливим доповненням, які залишають значення функцій незмінними (рис. 1).



$$f\,(x_1,\overline{x_2},x_3,x_4)=f\,(x_1,\overline{x_2},x_3,x_4)$$

Рис. 1. Ілюстрація симетрії булевої функції.

Така властивість симетричних функцій дозволяє здійснювати оптимізацію логічного синтезу при проектування цифрових схем.

Найпростішими прикладами симетричних функцій є функції, що подаються диз’юнкцією та кон’юнкцією неінвертованих змінних:

$$f(A,B)=A+B=B+A;$$

$$f(A,B)=AB=BA.$$

Особливість мінімізації булевих функцій методом образних перетворень полягає у застосуванні бінарних матриць з переліком правил рівносильного перетворення кон'юнктермів або макстермів заданих функцій. Результатом спрощення термів бінарної матриці є деяка універсальна функція, метадані, що можуть пояснювати інші дані, наприклад, виводити мінімальну булеву функцію для іншого базису. Це визначає ейдос (герменевтику) логічних операцій на бінарних структурах, а також екземпляри класів функцій логічних базисів на бінарних матрицях. Ейдос логічних операцій на 2-вимірних бінарних структурах, як наглядна наявність абстрактного, дає змогу зосередитись на тому, що робить об'єкт, а не на тому, як він це робить.

Еволюція візуально-матричної форми аналітичного методу є результатом впровадження нових логічних операцій спрощення логічних функцій. Зокрема це операції супер-склеювання змінних, неповного супер-склеювання змінних, подвоєння конституант з наступною операцією простого склеювання змінних, вставка однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Зазначені об'єкти (логічні операції) все ще дають змогу на практиці нарощувати апаратні можливості мінімізації симетричних булевих функцій аналітичним методом, підвищувати контрольну функцію, що забезпечує гарантію оптимального результату та практично обходитись, до певної міри, без застосування автоматизації процесу мінімізації симетричних функцій в основному та поліномному базисах. Інтерпретація результату застосування перерахованих логічних операцій полягає у тому, що не існує симетричних логічних функцій (крім мінімальних), яких неможливо спростити.

Таким чином, актуальним аспектом теоретичних наукових досліджень з мінімізації симетричних булевих функцій методом образних перетворень є виявлення можливостей вдосконалення та розширення апарату синтезу арифметичних компонентів на основі симетричних функцій для застосування їх у цифрових технологіях. Зокрема актуальними залишаються теоретичні дослідження з мінімізації симетричних булевих функцій, направлені на вдосконалення таких чинників, як:

– візуально-матричні методи мінімізації симетричних булевих функцій основного та поліномного базисів;

– вартості технології мінімізації симетричних булевих функцій;

– забезпечення достовірності отриманого результату мінімізації симетричних булевих функцій.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Метод синтезу симетричних логічних функцій, які генерують схеми у найгіршому випадку з глибиною O ($\log^2 n$) запропоновано у роботі [15]. Зазначається, що представлений метод синтезу симетричних функцій є першим, який направлений на зниження глибини логічних схем, що генеруються для симетричних булевих функцій. В експериментальних результатах продемонстровано, що розглянутий підхід дозволяє зменшити глибину фінальної реалізації функції до 25,93 % порівняно з іншими методами синтезу симетричних функцій.

Матричний метод паралельної декомпозиції для мінімізації симетричних булевих функцій в ортогональній формі представлено у роботі [16]. Результати, отримані цим методом, порівняно з використанням поліномів Жегалкіна мають поліпшені показники складності реалізації схем цифрових пристроїв. За рахунок поляризації входів булевих функцій метод може бути використано як один із складових чинників повного матричного методу паралельної декомпозиції для отримання комплексної мінімальної форми булевих функцій, яка має кращі показники реалізації, порівняно з класичними формами представлення булевих функцій. Особливістю методу є застосування вже підготовлених розширених матриць і таблиць повного переліку кон’юнктивних наборів, що дозволяє суттєво зменшити час мінімізації заданої функції.

Два паралельних алгоритми для вирішення проблеми пошуку точних виразів ESOP для довільної булевої функції запропоновано у роботі [17]. Оскільки ця проблема мінімізації є дуже складною, рішення представлено лише для семи змінних заданої функції. Час обробки деяких симетричних функцій семи змінних становить близько тижня. За допомогою запропонованого алгоритму, який є гібридним (OpenMP, MPI), для кластера з трьох вузлів і з чотирма ядрами можна досягти більш ніж дев’ятикратного прискорення обчислення поставленої задачі.

Спеціальною метрикою, що мотивує булеві функції, є мультиплікативна складність (MC): мінімальна кількість шлюзів AND, яка достатня для реалізації функції з булевою схемою на основі {XOR, AND, NOT}. У роботі [18] вивчається MC симетричних булевих функцій, вихід яких є інваріантним щодо перевпорядкування вхідних змінних. На основі методу ваг Геммінга впроваджуються нові методи, що дозволяють синтез схем з меншою кількістю логічних елементів AND, порівняно з верхньою межею. У роботі [18] представлена генерація схем для всіх таких функцій до 25 змінних. Як особливу увагу автори повідомляють про конкретні верхні межі для MC елементарних симетричних функцій $\sum_k^n$ та функцій підрахунку $\sum_k^n$ до n=25 вхідних змінних. Крім цього продемонстровано верхні межі максимального MC у класі n-змінних симетричних булевих функцій для кожного n до 132.

Класичні симетрики з двома змінними відіграють важливу роль у багатьох додатках EDA, починаючи від логічного синтезу та закінчуючи формальною верифікацією. У роботі [19] пропонується повний метод на основі схем, який використовує структурний аналіз, інтегроване моделювання та логічну відповідність для швидкого та масштабованого виявлення класичних симетрій повністю заданих булевих функцій. Експериментальні результати демонструють, що запропонований метод працює для булевих функцій з великим числом змінних, для яких BDD неможливо побудувати.

Алгоритм мінімізації функцій Ріда-Мюллера з фіксованою полярністю (FPRM) за поліноміальний час для повністю симетричних булевих функцій на основі впорядкованих функціональних діаграм прийняття рішень (OFDD) представлено у роботі [20]. Досліджено узагальнення алгоритму мінімізації для частково симетричних функцій. Алгоритм мінімізації реалізований як програма Sympathy. Переваги запропонованого алгоритму ілюструються прикладами та експериментальними результатами мінімізації симетричних функцій у класі FPRM.

Новий метод реалізації PSDKRO розглянуто у роботі [21]. Вирази Pseudo Kronecker (PSDKRO) – це клас логічних функцій AND/EXOR. У цій роботі доведено, що точну мінімізацію PSDKRO для повністю симетричних функцій можна здійснити за поліноміальний час. Представлені експериментальні результати спрощення симетричних функцій для порівняння ефективності розглянутого підходу з іншими методами мінімізації AND/EXOR.

Скорочені впорядковані двійкові діаграми прийняття рішень (ROBDD) – це структури даних, які часто використовується для подання та маніпулювання логічними функціями. Оскільки розмір ROBDD надзвичайно чутливий до впорядкування змінних на діаграмі, багато евристики було розроблено, щоб отримати оптимальний порядок змінних. Для класу частково симетричних булевих функцій робота [22] демонструє новий загальний метод підвищення якості евристики впорядкування змінних ROBDD на основі обміну змінних. Для демонстрації ефективності розглянутого підходу подані статистичні та контрольні результати впорядкування змінних на ROBDD.

Симетричні та частково симетричні функції вивчаються з алгебраїчної точки зору. У роботі [23] розглянуто тести на виявлення таких властивостей. Представлено більш загальний підхід, який включає поняття ρ-симетричних булевих функцій. Виведено канонічну форму для ρ-симетричних функцій, що веде до процедур синтезу, який покращує результати Шеннона.

У роботі [24] запропоновано метод ідентифікації типів симетрії на основі зазначеної класифікації (асиметрія, проста симетрія, анти симетрія, полі симетрія, псевдо симетрія) у булевих функціях *n* змінних за допомогою так званих клонів декомпозиції, сформованих за допомогою *q*-поділу заданих мінтермів. Сформульовано теореми, на основі яких можна знайти та ідентифікувати різні типи симетрії булевих функцій методами, простішими, ніж відомі. Переваги описаного алгоритму автентифікації проілюстровано на прикладі.

Розглянуті літературні джерела [15–24] в основному представляють методи мінімізації симетричних булевих функцій у базисах Буля та Ріда-Маллера. Є методи спрощення симетричних булевих функцій, які використовують теоретичні об’єкти суміжної теорії, як ваги Геммінга, впорядковані двійкові діаграми прийняття рішень (ROBDD) та ін. Алгоритми реалізації розглянутих методів оцінюються поліноміальною складністю. Обов’язковим технологічним пунктом для реалізації зазначених алгоритмів та методів є необхідність автоматизованих обчислень. При складному пошуку оптимальної функції компенсацією може бути наближений синтез – тенденція логічного синтезу, коли змінюються деякі результати логічної специфікації у межах допустимої не оптимальності цифрової схеми, що проектується.

Метод образних перетворень ґрунтується на бінарних комбінаторних системах з повторенням 2-(*n*, *b*)-design, 2-(*n*, *x*/*b*)-design, за кваліфікацією належить до візуально-матричної форми аналітичного методу [25] та не виключає ручного способу мінімізації симетричних булевих функцій.

Таким чином, алгоритми і методи, створені програмні засоби до них, які охоплюють загальну процедуру мінімізації симетричних булевих функцій [15–24] та метод образних перетворень, посідають відмінні підходи (принципи мінімізації). А відтак вбачають різні перспективи стосовно можливості алгоритмічної мінімізації симетричних булевих функцій.

Перспективою методу образних перетворень, як нащадка аналітичного методу, стосовно належної мінімізації симетричних логічних функцій у базисі Ріда–Маллера є створення необхідної алгебри у частині правил рівносильного перетворення поліномних функцій [26]. А також нові розроблені рівносильні перетворення кон'юнктермів поліноміальної нормальної форми (ПНФ) на основі методу вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних (п. 5. 1). Таким чином класичний аналітичний метод все ще має перспективу нарощувати свої апаратні можливості стосовно мінімізації симетричних булевих функцій. А це є підставою вважати, що програмно-технологічна база, яка представлена алгоритмами і методами з теоретичними об'єктами суміжних теорій [15–24], є недостатньою, для проведення теоретичних досліджень стосовно оптимальної мінімізації симетричних булевих функцій, зокрема у базисі Ріда–Маллера.

Це визначає необхідність здійснення досліджень з рівносильними образними перетвореннями для мінімізації симетричних булевих функцій. Зокрема з процедурою, що використовує рівносильні перетворення кон'юнктермів ПНФ на основі методу вставки однакових кон'юнктермів поліномних функцій з наступною операцією супер-склеювання змінних (п. 5. 1).

У прикладному відношенні метод образних перетворень забезпечить розширення можливостей технології проектування цифрових компонентів на основі симетричних булевих функцій в основному $\{\vee, \wedge, \neg\}$ та поліномному $\{\wedge, \oplus, 1\}$ базисах.

3. Мета і завдання дослідження

Метою роботи є поширення методу образних перетворень на мінімізацію симетричних булевих функцій у класі досконалих диз'юнктивних нормальних форм (ДДНФ), досконалих кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ) та досконалих поліномних нормальних форм (ДПНФ). Це дасть можливість спростити, збільшити продуктивність мінімізації симетричних булевих функцій в основному та поліномному базисі, використовуючи алгебричний апарат зазначених базисів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

– встановити рівносильні перетворення поліномної нормальної форми методом вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних;

– провести аналіз результатів спрощення симетричних булевих функцій в основному базисі {І, АБО, НЕ} методом образних перетворень та прикладів мінімізації симетричних функцій у базисі Буля з метою порівняння кошту реалізації мінімальної симетричної функції та кількості процедурних кроків;

– провести аналіз результатів спрощення симетричних булевих функцій у базисі Ріда-Маллера методом образних перетворень та прикладів мінімізації симетричних функцій у поліномному базисі з метою порівняння кошту реалізації мінімальної симетричної функції та кількості процедурних кроків;

– провести порівняльний аналіз результатів спрощення булевих функцій з частковою симетрією методом образних перетворень та методами декомпозиції з метою порівняння кошту реалізації мінімальної симетричної функції та кількості процедурних кроків;

– здійснити оптимізацію логічної структури симетричного 4-входового суматора бінарних кодів.

4. Матеріали та методи дослідження

Особливість мінімізації симетричних булевих функцій полягає у тому, що не всі такі функції спрощуються у досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ) або у досконалій кон'юнктивній нормальній формі (ДКНФ) основного базису $\{\vee,\wedge,\neg\}$. Використання елементного базису лише однієї функціонально повної системи перемикальних функцій у загальному випадку не забезпечує умов отримання оптимальної комбінаційної схеми. Як показує практика проектування логічних схем за допомогою об'єднання елементних базисів, які належать декільком функціонально повним системам (наприклад, системам $\{\wedge,\oplus,1\}$, {І, АБО, НЕ}), дозволяє будувати оптимальні комбінаційні схеми (за показниками апаратної складності та швидкодії), у тому числі і при застосуванні симетричних булевих функцій.

Приклад 1. Симетричною булевою функцією (СФ) є функція, що дорівнює 1 на C_n^a наборах змінних, які мають рівно *a* одиниць на всіх цих наборах [27]. Число *a* називається індексом СФ. Фундаментальна СФ – це функція з одним індексом, особливістю якої є неможливість застосування операції склеювання змінних для базису Буля $\{\vee,\wedge,\neg\}$. Так фундаментальна СФ 3-ох змінних з індексом *a*=1 у базисі Буля записується у вигляді (1) [27]:

$$H_3(1) = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3. \quad (1)$$

Симетрична функція (1) представляє 3-рівневу логіку з ціною реалізації $k_\theta / k_l / k_{in} = 3/9/6,$ де k_θ, k_l, k_{in} – кількість кон'юнктермів, літералів та інверторів відповідно [28].

Однак симетричну функцію (1) можна спрощувати у поліномному базисі $\{\wedge,\oplus,1\}$ з переходом до змішаного базису. Оскільки функція (1) є сингулярною [26] перейдемо до алгебри Ріда–Маллера. Отримаємо:

$$H_3(1)_{\min} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 \oplus \overline{x}_1 x_2 x_3 = \overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 \overline{x_2 x_3} = \overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1\left(\overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 \overline{x_2 x_3} = \qquad (2)$$

$$= \left(x_1 + x_2 x_3\right) \oplus \left(x_2 + x_3\right).$$

Мінімальна симетрична функція (МСФ) функції $H_3(1)$ (1) у змішаному базисі має вигляд:

$$H_3(1)_{\min} = \left(x_1 + x_2 x_3\right) \oplus \left(x_2 + x_3\right). \qquad (3)$$

МСФ (3) представляє 3-рівневу логіку з ціною реалізації

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 2/5/0,$$

що менше на чотири літерали, порівняно з (1) [27].

Для спрощення функції (2) застосовано процедуру вставки однакових кон'юнктермів для поліномної нормальної форми (ПНФ) з наступною операцією супер-склеювання змінних [26].

Споглядаючи МСФ (3) бачимо, що перестановка змінних x_2 і x_3 не змінить значення функції. Таким чином функція (3) має часткову симетрію для змінних з індексами 2 і 3.

Верифікація отриманої МСФ (3) представлена у табл. 1.

Таблиця 1
Верифікація МСФ (3) – $\left(x_1 + x_2 x_3\right) \oplus \left(x_2 + x_3\right)$

№	x_1	x_2	x_3	$H_3(1)$ (4)	$\left(x_1 + x_2 x_3\right) \oplus \left(x_2 + x_3\right)$	$H_3(1)_{\min}$
1	0	0	1	1	$\left(0_1 + 0_2 1_3\right) \oplus \left(0_2 + 1_3\right)$	1
2	0	1	0	1	$\left(0_1 + 1_2 0_3\right) \oplus \left(1_2 + 0_3\right)$	1
4	1	0	0	1	$\left(1_1 + 0_2 0_3\right) \oplus \left(0_2 + 0_3\right)$	1

З огляду табл. 1 видно, що МСФ (3) – $\left(x_1 + x_2 x_3\right) \oplus \left(x_2 + x_3\right)$ задовольняє задану логічну функцію $H_3(1)$ (1).

Приклад 2. Спростити булеву функцію з частковою симетрією, що задана в алгебричній формі (4)

$$
\begin{aligned}
y = {} & \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \\
& + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2\overline{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3\overline{x}_4.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Перестановка змінних x_3 і x_4 не змінює значення функції (4).

Рішення:

Спрощення функції (4) проведемо у ДДНФ представлення з переходом до базису Ріда–Маллера.

$$
y_{\min} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
& = \overline{x}_1\overline{x}_2\left(x_3 \oplus x_4\right) + \overline{x}_1 x_2\left(\overline{x_3 \oplus x_4}\right) + \\
& + x_1\overline{x}_2\left(\overline{x_3 \oplus x_4}\right) + x_1 x_2\left(x_3 \oplus x_4\right) = \\
& = \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1 x_2\right) + \left(\overline{x_3 \oplus x_4}\right)\left(\overline{x}_1 x_2 + x_1\overline{x}_2\right) = \\
& = \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1 \oplus x_2}\right) + \left(\overline{x_3 \oplus x_4}\right)\left(x_1 \oplus x_2\right) = \\
& = \left(x_1 \oplus x_2\right) \oplus \left(x_3 \oplus x_4\right) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4.
\end{aligned}
$$

Мінімальна симетрична функція (МСФ) функції (4) у базисі Ріда–Маллера має вигляд (5):

$$
y_{\min} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4. \tag{5}
$$

Функція (5) має повну симетрію – перестановка будь-якої пари змінних не змінює значення функції.

5. Результати мінімізації симетричних булевих функцій методом образних перетворень

Рівносильні образні перетворення при мінімізації симетричних булевих функцій дають наступний результат:

– дають змогу встановлювати рівносильні перетворення поліномної нормальної форми методом вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних;

– забезпечують проведення аналізу результатів спрощення симетричних булевих функцій в основному базисі {І, АБО, НЕ} та прикладів мінімізації симетричних функцій у базисі Буля з метою порівняння кошту реалізації мінімальної симетричної функції та кількості процедурних кроків;

– забезпечують проведення аналізу результатів спрощення симетричних булевих функцій у базисі Ріда–Маллера та прикладів мінімізації симетричних функцій у поліномному базисі з метою порівняння кошту реалізації мінімальної симетричної функції та кількості процедурних кроків;

– забезпечують проведення порівняльного аналізу результатів спрощення булевих функцій з частковою симетрією та прикладів зменшення складності реалізації булевих функцій з частковою симетрією:

– забезпечують проведення порівняльного аналізу результатів спрощення булевих функцій з частковою симетрією методом образних перетворень та методами декомпозиції;

– здійснюють оптимізацію логічної структури симетричного 4-входового суматора бінарних кодів.

5. 1. Виведення рівносильних перетворень поліномної функції методом вставки однакових кон'юнктермів

Процедура вставки однакових кон’юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних [26] дає змогу виводити рівносильні перетворення поліномної нормальної форми булевих функцій.

Виведення деяких рівносильних перетворень поліномної нормальної форми має наступний вигляд:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}} = \left|\begin{array}{ccc||ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix} = 1 \oplus \left(x_1 \oplus x_2\right) + \left(x_1 \oplus x_3\right).$$

Оскільки четверта матриця сингулярна, у ній необхідно перейти до алгебри основного базису $\{\vee, \wedge, \neg\}$ та провести операцію напівсклеювання змінних.

Отже:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \oplus x_1x_2x_3 = 1\oplus\left(x_1\oplus x_2\right)+\left(x_1\oplus x_3\right) = \overline{\left(x_1\oplus x_2\right)+\left(x_1\oplus x_3\right)} = \left(\overline{x_1\oplus x_2}\right)\left(\overline{x_1\oplus x_3}\right) =$$
$$= \left(\overline{x_1}\oplus x_2\right)\left(\overline{x_1}\oplus x_3\right) = \left(x_1\oplus \overline{x_2}\right)\left(x_1\oplus \overline{x_3}\right).$$

$$\begin{array}{|cccc|}\hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \left|\begin{array}{cccc||cccc}
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&1&0&1&1\\
0&1&0&0&1&1&0&0\\
0&1&0&1&1&1&0&0\\
0&1&0&1&1&1&0&1\\
0&1&1&0&1&1&0&1\\
0&1&1&0&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1
\end{array}\right| = 1\oplus\left|\begin{array}{cccc}
0&0&0&1\\
0&0&1&0\\
0&0&1&1\\
0&1&0&0\\
0&1&0&1\\
0&1&1&0\\
0&1&1&1\\
1&0&0&0\\
1&0&0&1\\
1&0&1&0\\
1&0&1&1\\
1&1&0&0\\
1&1&0&1\\
1&1&1&0
\end{array}\right| =$$

$$=1\oplus\left|\begin{array}{cccc}
0&0&0&1\\
0&0&1&\\
0&1&&\\
1&0&&\\
1&1&0&\\
1&1&1&0
\end{array}\right| = 1\oplus\left|\begin{array}{cccc}
0&0&&1\\
0&0&1&\\
0&1&&\\
1&0&&\\
1&1&0&\\
1&1&&0
\end{array}\right| = 1\oplus\left|\begin{array}{cccc}
0&&&1\\
0&&1&\\
0&1&&\\
1&0&&\\
1&&0&\\
1&&&0
\end{array}\right| =$$
$$=1\oplus\left(x_1\oplus x_2\right)+\left(x_1\oplus x_3\right)+\left(x_1\oplus x_4\right).$$

Оскільки четверта матриця сингулярна, у ній обирається алгебра основного базису $\{\vee,\wedge,\neg\}$ та проводиться операція напівсклеювання змінних. У п’ятій матриці також проводиться операція напівсклеювання змінних.

Отже:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \oplus x_1x_2x_3x_4 = 1\oplus\left(x_1\oplus x_2\right)+\left(x_1\oplus x_3\right)+\left(x_1\oplus x_4\right) =$$
$$= \overline{\left(x_1\oplus x_2\right)+\left(x_1\oplus x_3\right)+\left(x_1\oplus x_4\right)} =$$
$$= \left(\overline{x_1\oplus x_2}\right)\left(\overline{x_1\oplus x_3}\right)\left(\overline{x_1\oplus x_4}\right) = \left(\overline{x_1}\oplus x_2\right)\left(\overline{x_1}\oplus x_3\right)\left(\overline{x_1}\oplus x_4\right).$$

Наступне рівносильне перетворення виводиться за індукцією.

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \oplus x_1x_2x_3x_4x_5 = 1 \oplus \left(x_1 \oplus x_2\right) + \left(x_1 \oplus x_3\right) + \left(x_1 \oplus x_4\right) + \left(x_1 \oplus x_5\right) =$$

$$= (\overline{\left(x_1 \oplus x_2\right) + \left(x_1 \oplus x_3\right) + \left(x_1 \oplus x_4\right) + \left(x_1 \oplus x_5\right)} =$$

$$= \left(\overline{x_1 \oplus x_2}\right)\left(\overline{x_1 \oplus x_3}\right)\left(\overline{x_1 \oplus x_4}\right)\left(\overline{x_1 \oplus x_5}\right) = \left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_3\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_5\right).$$

Окремі приклади рівносильних перетворень ПНФ та ДНФ, за результатами процедури вставки однакових кон’юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних, представлені у табл. 2, 3, відповідно.

Таблиця 2
Таблиця деяких рівносильних перетворень кон’юнктермів ПНФ

$\overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus x_1x_2$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \oplus x_1x_2x_3$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_3\right)$
$x_1\overline{x_2}x_3 \oplus \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} \oplus x_3\right)$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \oplus x_1x_2x_3x_4$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_3\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_4\right)$
$x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \oplus \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_1 \oplus x_4\right)\left(x_2 \oplus x_3\right)$
$\overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_1 \oplus x_3\right)\left(x_1 \oplus x_4\right)$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \oplus x_1x_2x_3x_4x_5$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_3\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_5\right)$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}\,\overline{x_6} \oplus x_1x_2x_3x_4x_5x_6$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_3\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_5\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_6\right)$

Алгебричні вирази у лівому стовпчику табл. 2 сингулярні [26], тому останні можна представити і в основному базисі $\{\vee, \wedge, \neg\}$ (табл. 3).

Споглядаючи табл. 2, 3, бачимо, що логічна операція еквівалентності $\overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_1x_2$ є частковим випадком на множині подібних рівносильних перетворень булевих виразів.

Приклад 3. Спростити булеву функцію, що задана у канонічній формі (6) [29]

$$f\left(x_1, x_2, x_3x_4\right) = \left(0,1,6,8,11,14,15\right), \tag{6}$$

застосовуючи метод вставки однакових кон’юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Таблиця 3

Таблиця деяких рівносильних перетворень мінтермів ДНФ

$\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1x_2$	$\left(\overline{x}_1 \oplus x_2\right)$
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3$	$\left(\overline{x}_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_3\right)$
$x_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_2 \oplus x_3\right)$
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2x_3x_4$	$\left(\overline{x}_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_3\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_4\right)$
$x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_1 \oplus x_4\right)\left(x_2 \oplus x_3\right)$
$\overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_1 \oplus x_3\right)\left(x_1 \oplus x_4\right)$
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5 + x_1x_2x_3x_4x_5$	$\left(\overline{x}_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_3\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_4\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_5\right)$
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5\overline{x}_6 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6$	$\left(\overline{x}_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_3\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_4\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_5\right)\left(\overline{x}_1 \oplus x_6\right)$

Рішення.

При спрощенні функції (6) у роботі [29] отримано результат:

$$Y^{\oplus} = \left\{(--1-),(-0--),(10-1),(0111)\right\}^{\oplus}. \quad (7)$$

Застосуємо до кон’юнктермів – $\left\{(10-1),(0111)\right\}^{\oplus} = x_1\overline{x}_2x_4 \oplus \overline{x}_1x_2x_3x_4$ функції (7) метод вставки однакових кон’юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & 1 & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & 1 & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = 1 \oplus \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = 1 \oplus \left(\left(\overline{x_1 \oplus x_2} \right) + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_4} \right) =$$

$$= \overline{\overline{x_1 \oplus x_2} + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_4}} = \left(x_1 \oplus x_2 \right) \left(\overline{x_2 \overline{x_3}} \right) x_4 = \left(x_1 \oplus x_2 \right) \left(\overline{x_2} + x_3 \right) x_4 .$$

Оскільки шоста матриця сингулярна, у ній обираємо алгебру основного базису $\{\vee, \wedge, \neg\}$ та проводимо операцію напівсклеювання змінних. Результат напівсклеювання змінних записується до сьомої матриці. У сьомій матриці також проводиться операція напівсклеювання змінних. Результат записується до восьмої матриці. У 8, 9 матрицях проведена операція узагальненого склеювання змінних. У 10 матриці проведена операція поглинання змінних. Результат поглинання змінних записано до 11 матриці.

Кон'юнктерми $x_1\overline{x_2}x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4$ після спрощення мають вигляд (8):

$$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} + x_3\right)x_4. \tag{8}$$

Таким чином вираз (8) містить на два літерали менше, порівняно з виразом кон'юнктермів $x_1\overline{x_2}x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4$. Верифікація отриманого результату (8) представлена у табл. 4.

Таблиця 4

Верифікація виразу $\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} + x_3\right)x_4$ (8)

№	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \oplus x_1\overline{x_2}x_3x_4 \oplus$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} + x_3\right)x_4$	$\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} + x_3\right)x_4$
9	1	0	0	1	$\oplus\overline{x_1}x_2x_3x_4$ 1	$\left(1_1 \oplus 0_2\right)\left(\overline{0_2} + 0_3\right)1_4$	1
11	1	0	1	1	1	$\left(1_1 \oplus 0_2\right)\left(\overline{0_2} + 1_3\right)1_4$	1
7	0	1	1	1	1	$\left(0_1 \oplus 1_2\right)\left(\overline{1_2} + 1_3\right)1_4$	1

Споглядаючи табл. 4 бачимо, що спрощений вираз (8) – $\left(x_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} + x_3\right)x_4$. задовольняє задані кон'юнктерми $x_1\overline{x_2}x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4$ функції (7). Замінивши кон'юнктерми $x_1\overline{x_2}x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4$ функції (7) на вираз (8) отримаємо мінімальну функцію у змішаному базисі:

$$Y = x_3 \oplus \overline{x_2} \oplus \left(x_1 \oplus x_2\right)\left(\overline{x_2} + x_3\right)x_4,$$

яка вміщує на два літерали менше, порівняно з (7) [29].

5. 2. Мінімізація симетричних булевих функцій основного базису методом образних перетворень

У загальному випадку СФ може мати декілька індексів. Наприклад СФ

$$H_3\left(1,2\right) = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3, \tag{9}$$

має два індекси: a=1 і a=2. Тут набори змінних – $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$; $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$; $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$ мають по одній 1, а набори змінних $x_1x_2\overline{x_3}$; $\overline{x_1}x_2x_3$; $x_1\overline{x_2}x_3$ мають по дві 1. Оскільки індекси СФ (9) відрізняються на одиницю, можливою є операція склеювання змінних в основному базисі $\left\{\vee, \wedge, \neg\right\}$ [27].

Приклад 4. Методом образних перетворень спростити симетричну функцію H_3(1,2) (9) [27]:

Рішення:

Представимо еквівалентну двійкову матрицю функції H_3 (1,2) у лексикографічному порядку та проведемо спрощення H_3 (1,2) у ДДНФ представлення з переходом до змішаного базису.

$$H_3(1,2)_{\min} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix} = x_1 \oplus x_2 + x_1 \oplus x_3. \qquad (10)$$

У першій матриці (10) проведено просте склеювання змінних, результат склеювання записано до другої матриці. У другій матриці (10) проведено напівсклеювання змінних, результат напівсклеювання змінних записано до третьої матриці.

МСФ функції H_3(1,2) (10) у змішаному базисі має вигляд (11):

$$H_3(1,2)_{\min} = x_1 \oplus x_2 + x_1 \oplus x_3. \qquad (11)$$

МСФ (11) представляє 2-рівневу логіку з ціною реалізації

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 2/4/0,$$

що менше на два літерали, порівняно з [27].

З огляду на МСФ (11) видно, що перестановка змінних x_2 і x_3 не змінить значення функції. Таким чином мінімальна функція (11) у змішаному базисі має часткову симетрію змінних x_2 і x_3.

Приклад 5. Методом образних перетворень спростити симетричну функцію $H_4(2,3)$, що задана Картою Карно (рис. 2) [27]:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	0	1
10	0	1	1	1

Рис. 2. Карта Карно для симетричної функції H_4 (2,3)

Рішення:

Представимо еквівалентну двійкову матрицю функції H_4 (2,3) (рис. 2) у лексикографічному порядку та проведемо спрощення H_4 (2,3) (рис. 2) у ДДНФ представлення з переходом до змішаного базису.

$$H_4(2,3)_{\min} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0&0&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&0&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&\\ 1&&0&1\\ 1&0&1&\\ 1&1&&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&&1&1\\ 0&1&&1\\ 0&1&1&\\ 1&&0&1\\ 1&0&1&\\ 1&1&&0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0&&1&1\\ 0&1&&1\\ 0&1&1&\\ 1&&0&1\\ 1&0&1&\\ 1&1&&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} &&1&1\\ &1&&1\\ &1&1&\\ 1&&&1\\ 1&&1&\\ 1&1&& \end{vmatrix} = \qquad (12)$$

$$= x_4\left(x_1 \oplus x_3\right) + x_3\left(x_1 \oplus x_2\right) + x_2\left(x_1 \oplus x_4\right).$$

У першій матриці (12) проведено просте склеювання змінних, результат склеювання записано до другої матриці. У другій матриці (12) проведено напівсклеювання змінних, результат напівсклеювання змінних записано до третьої матриці. У четвертій матриці здійснюємо перехід до змішаного базису

МСФ функції H_4 (2,3) (рис. 2) [27] у змішаному базисі має вигляд:

$$H_4(2,3)_{\min} = x_4\left(x_1 \oplus x_3\right) + x_3\left(x_1 \oplus x_2\right) + x_2\left(x_1 \oplus x_4\right). \qquad (13)$$

МСФ (13) представляє 3-рівневу логіку з ціною реалізації

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 3/9/0,$$

що менше на три літерали, порівняно з [27].

Перестановка змінних x_1 і x_2 у МСФ (13) утворює функцію (14)

$$H_4(2,3)_{\min} = x_4(x_2 \oplus x_3) + x_3(x_1 \oplus x_2) + x_1(x_2 \oplus x_4). \tag{14}$$

Перестановка змінних x_3 і x_4 у МСФ (13) утворює функцію (15)

$$H_4(2,3)_{\min} = x_3(x_1 \oplus x_4) + x_4(x_1 \oplus x_2) + x_2(x_1 \oplus x_3). \tag{15}$$

Обидві функції (14) і (15) не змінюють значення функції (13). Це означає, що МСФ (13) симетрична відносно змінних x_1, x_2 та x_3, x_4. Аналогічна симетричність МСФ (13) очікується і відносно пар змінних x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3 та x_2, x_4.

Приклад 6. Методом образних перетворень спростити булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ з частковою симетрією, що задана в алгебричній формі [30]:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = {} & \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + \\ & + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Рішення:

Функція (16) є частково симетрична. Перестановка змінних x_1 і x_3 не змінює значення функції.

Представимо еквівалентну двійкову матрицю функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (16) у лексикографічному порядку та проведемо спрощення $f(x_1, x_2, x_3)$ (16) у ДДНФ представлення з переходом до змішаного базису.

$$f(x_1,x_2,x_3)_{\min} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array} \right| = (\overline{x}_1 \oplus x_2) + (\overline{x}_3 \oplus x_4).$$

МСФ функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (16) [30] у змішаному базисі має вигляд (17):

$$f(x_1,x_2,x_3)_{\min} = (\overline{x}_1 \oplus x_2) + (\overline{x}_3 \oplus x_4). \tag{17}$$

МСФ (17) представляє 3-рівневу логіку з ціною реалізації

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 2/4/2,$$

що менше на два літерали та один терм, порівняно з [30].

Функція (17) залишається частково симетричною. Перестановка змінних з індексами (1,3) не змінює значення функції.

5. 3. Мінімізація симетричних булевих функцій поліномного базису методом образних перетворень

Приклад 7. Методом образних перетворень спростити булеву функцію з частковою простою симетрією, що задана в алгебричній формі (18) [31]:

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3}\,\overline{x_4} \oplus x_2 x_3 \overline{x_4}\right) + x_1 x_2. \tag{18}$$

Рішення:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x_1\oplus x_2\oplus \bar{x}_3\bar{x}_4\oplus x_2x_3\bar{x}_4\right)+x_1x_2=$$

$$=\left(x_1\bar{x}_2\oplus \bar{x}_1x_2\oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4\oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4\right)+$$

$$+x_1x_2x_3+x_1x_2\bar{x}_3=\left(\begin{array}{l} x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\oplus \bar{x}_1x_2x_3\oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus \\ \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4\oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \end{array}\right)+$$

$$+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4=$$

$$=\left(\begin{array}{l} x_1\bar{x}_2x_3x_4\oplus x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\oplus \cancel{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}\oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4\oplus \cancel{\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4}\oplus \\ \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\oplus \cancel{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}\oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus \cancel{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}\oplus \cancel{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}\oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus \\ \oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4\oplus \cancel{\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4} \end{array}\right)+$$

$$+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4=$$

$$=\left(\begin{array}{l} x_1\bar{x}_2x_3x_4\oplus x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4\oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus \\ \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4 \end{array}\right)+$$

$$+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4=x_1\bar{x}_2x_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+$$

$$+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+$$

$$+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4=x_1\bar{x}_2x_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+$$

$$+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+$$

$$+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4=$$

$$=\begin{vmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&0\\ 1&&& \end{vmatrix}= \tag{19}$$

$$=\begin{vmatrix} &0&0&0\\ 0&1&&1\\ 1&&& \end{vmatrix}=\left(x_1+x_2x_4\right)\oplus \overline{x_2x_3x_4}.$$

У першій матриці (19) застосовано процедуру вставки однакових кон'юнктермів ПНФ з наступною операцією супер-склеювання змінних [26]. Результат вставки записано до другої матриці (19).

МСФ функції $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ (18) [31] у змішаному базисі має вигляд (20):

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)_{\min} = \left(x_1 + x_2 x_4\right) \oplus \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}. \tag{20}$$

МСФ (20) представляє 3-рівневу логіку з ціною реалізації

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 2/6/3,$$

що менше на три літерали, порівняно з (18).

З огляду на МСФ (20) видно, що перестановка змінних x_2 і x_4; $\overline{x_2}$ і $\overline{x_4}$ не змінить значення функції. Отже функція (20) має часткову просту симетрією відносно змінних x_2 і x_4 та $\overline{x_2}$ і $\overline{x_4}$.

Приклад 8. Спростити частково симетричну булеву функцію, що задана у канонічній формі (21) [32]

$$f = \left(0,3,5,6,7,8,9,10,12,15\right), \tag{21}$$

застосовуючи метод вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Рішення:

У поліномному форматі за допомогою Карти Карно у роботі [32] функцію (21) спрощено до виду:

$$f = x_1 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 x_4 \oplus x_3 x_4 \oplus$$
$$\oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4,$$

з ціною реалізації $k_\theta / k_l = 6/15$.

У роботі [29] цю ж функцію (21) спрощено до виду:

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_4,$$

з ціною реалізації $k_\theta / k_l = 6/14$.

Функція (21) у роботі [26] спрощена до такого виду:

$$Y_{\text{ПНФ}} = x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}. \tag{22}$$

з ціною реалізації $k_\theta / k_l = 6/12$.

Застосуємо до кон'юнктермів $\overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ функції (22) метод вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних, отримаємо:

$$\overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4).$$

Мінімізацію функції (22) можна продовжити:

$$\begin{aligned} Y_{\text{ПНФ}} &= x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \\ &= x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus (x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4) = \\ &= \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus (x_1 \oplus x_2)\overline{(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4)} = \\ &= \left(\overline{x_3} \oplus x_4\right) \oplus (x_1 \oplus x_2)\left(\left(\overline{x_1 \oplus x_3}\right) + \left(\overline{x_1 \oplus x_4}\right)\right). \end{aligned}$$

МСФ функції (21) буде мати вигляд (23):

$$Y_{\text{ПНФ}} = \left(\overline{x_3} \oplus x_4\right) \oplus (x_1 \oplus x_2)\left(\left(\overline{x_1 \oplus x_3}\right) + \left(\overline{x_1 \oplus x_4}\right)\right). \qquad (23)$$

Ціна реалізації МСФ (23) становить

$$k_\theta / k_l / k_{in} = 2/8/3,$$

що на сім літералів менше, порівняно з [32].

Результатом безпосереднього спрощення кон'юнктермів $\overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ функції $Y_{\text{ПНФ}} = x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} \oplus x_4 \oplus \overline{x_1}x_2x_3x_4 \oplus x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ методом вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних є вираз – $(x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4)$. Далі проводиться поліномне поглинання змінних $x_1 \oplus x_2$ та $(x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4)$ [26], результатом якого є логічний вираз – $(x_1 \oplus x_2)\overline{(x_1 \oplus x_3)(x_1 \oplus x_4)}$.

5. 4. Порівняння методу образних перетворень з методами декомпозиції при спрощенні булевих функцій

Вважається, що булеві функції, що залежать від великого числа змінних не мінімізуються оптимально [33]. У зв'язку з цим виникає задача декомпозиції булевих функцій. Вирішення проблеми полягає у розбитті вихідної функції на мінімальну кількість булевих функцій, кожна з яких залежить від меншого числа змінних, порівняно з вихідною функцією. Існує декомпозиція, що розділяє змінні вихідної функції [34] і така, що не розділяє змінні [35].

Приклад 9. Методом образних перетворень спростити булеву функцію, що задана у диз'юнктивній нормальній формі [34].

$$F = \bar{a}bd + bcd + a\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}. \tag{24}$$

Рішення:

Функція (24) частково симетрична. Перестановка змінних з індексами (2,4) не змінює значення функції (24).

$$F_{\min} = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 1 & & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & 1 & & 1 \\ 1 & & 0 & \end{array}\right| = a\bar{c} \oplus bd.$$

Мінімальна функція залишається частково симетричною. Перестановка змінних з індексами (2, 4) не змінює значення мінімальної функції.

Результати спрощення функції (24) методом образних перетворень та методом декомпозиції співпадають, однак метод образних перетворень у даному прикладі є простішим.

Приклад 10. Методом образних перетворень спростити булеву функцію, що задана у диз'юнктивній нормальній формі [35].

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3. \tag{25}$$

Рішення:

Функція (25) симетрична. Перестановка змінних з будь-якою парою індексів не змінює значення функції (25).

Згідно з рівносильними перетвореннями кон'юнктермів ПНФ булевих функцій (п. 5. 1) (табл. 2) знаходимо мінімальну функцію:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = \left(\bar{x}_1 \oplus x_2\right)\left(\bar{x}_1 \oplus x_3\right). \tag{26}$$

Мінімальна функція залишається частково симетричною. Перестановка змінних з індексами (2,3) не змінює значення мінімальної функції.

Результати спрощення функції (25) методом образних перетворень та методом декомпозиції, що не розділяє змінні, співпадають, однак метод образних перетворень у даному прикладі є простішим. Логічна структура мінімальної функції (26) співпадає з логічною структурою двоблочної декомпозиції, що не розділяє змінні [35].

5. 5. Синтез симетричного 4-входового суматора бінарних операндів

Симетричний 4-входовий суматор бінарних кодів заданий таблицею істинності (табл. 5).

Таблиця 5
Таблиця істинності 4-входового симетричного суматора

Входи					Виходи		
№	a_1	a_2	a_3	a_4	S_2	S_1	S_0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	1	0	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	0
7	0	1	1	1	0	1	1
8	1	0	0	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	0	1	1
12	1	1	0	0	0	1	0
13	1	1	0	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0	1	1
15	1	1	1	1	1	0	0

Згідно з табл. 5 додавання будь-якого одного операнда a_1, a_2, a_3, a_4 дає однакове значення суми – 001; додавання будь-яких двох пар операндів a_3a_4, a_2a_4, a_2a_3, a_1a_4, a_1a_3, a_1a_2 дає однакове значення суми – 010; додавання будь-яких трійок операндів $a_2a_3a_4$, $a_1a_3a_4$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_3$ дає однакове значення суми – 011; додавання чотирьох операндів дає значення суми – 100. Таким чином, будь-яка перестановка π значень змінних не змінює значення функції, і, отже, 4-входовий суматор представлений табл. 5 є симетричним.

Система рівнянь 4-входового симетричного суматора у ДДНФ має вигляд:

$$
\begin{cases}
S_0 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \\
+\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}x_3x_4 + \\
+x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\overline{x_4}; \\
S_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \\
+\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \\
+x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\overline{x_4}; \\
S_2 = x_1x_2x_3x_4.
\end{cases} \tag{27}
$$

Є два підходи до мінімізації систем булевих функцій від n змінних [36]. Мінімізацію системи функцій (27) проведемо окремо для кожної функції.

Мінімізація функції S_0.

Функція S_0 сингулярна [26], для мінімізації S_0 обираємо алгебру Ріда-Маллера. Використовуємо тотожності (28) і (29) [26].

$$
x_1\overline{x_2} \oplus \overline{x_1}x_2 = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_2} \oplus \overline{x_1}. \tag{28}
$$

$$
xy \oplus \overline{x}\,\overline{y} = \overline{x \oplus y} = \overline{\overline{x} \oplus \overline{y}} = x \oplus \overline{y} = \overline{x} \oplus y. \tag{29}
$$

$$
S_0 = \left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & & 1 \\
0 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & & 1 \\
1 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & & 1 \\
1 & 1 & & 1 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}\right| =
$$

$$
= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\left(x_3 \oplus x_4\right) \oplus x_1x_2\left(x_3 \oplus x_4\right) \oplus \overline{x_1}x_2\left(\overline{x_3} \oplus x_4\right) \oplus x_1\overline{x_2}\left(\overline{x_3} \oplus x_4\right) =
$$

$$
= \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus x_1x_2\right) \oplus \left(\overline{x_3} \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1}x_2 \oplus x_1\overline{x_2}\right) =
$$

$$
= \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1 \oplus x_2}\right) \oplus \left(\overline{x_3 \oplus x_4}\right)\left(x_1 \oplus x_2\right) = \left(x_1 \oplus x_2\right) \oplus \left(x_3 \oplus x_4\right) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4.
$$

Мінімізація функції S_1.

$$S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \end{vmatrix} =$$

$$x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_4 =$$
$$= x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus x_1\left(x_3 \oplus x_4\right) \oplus x_2\left(x_3 \oplus x_4\right) =$$
$$= x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right).$$

$$S_1 = x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right).$$

$$S_1 = x_1x_2 \oplus x_3x_4 \oplus \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right) =$$
$$= \left(x_1x_2 \oplus x_3x_4\right)\overline{\left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right)} +$$
$$+ \overline{x_1x_2 \oplus x_3x_4}\left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right).$$

$$\left(x_1x_2 \oplus x_3x_4\right)\overline{\left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right)} =$$

$$= \left(x_1x_2 \oplus x_3x_4\right)\left(\overline{x_3 \oplus x_4} + \overline{x_1 \oplus x_2}\right) =$$

$$= \left(x_1x_2 \oplus x_3x_4\right)\left(x_3x_4 \oplus \overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2 \oplus \overline{x_1}\,\overline{x_2}\right) =$$

$$= \left(x_1x_2\overline{x_3x_4} + \overline{x_1x_2}x_3x_4\right)\begin{pmatrix} x_3x_4\overline{\overline{x_3}}\,\overline{\overline{x_4}} + \overline{x_3x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \\ + x_1x_2\overline{\overline{x_1}}\,\overline{\overline{x_2}} + \overline{x_1x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1x_2\left(\overline{x_3} + \overline{x_4}\right) + \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right)x_3x_4\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_3x_4\left(x_3 + x_4\right) + \left(\overline{x_3} + \overline{x_4}\right)\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \\ + x_1x_2\left(x_1 + x_2\right) + \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right)\overline{x_1}\,\overline{x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_4} + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_2}x_3x_4\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_3x_4 + x_3x_4 + \overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_3}\,\overline{x_4} + \\ + x_1x_2 + x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_4} + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_2}x_3x_4\right) \times$$

$$\times \left(x_3x_4 + \overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\right) =$$

$$= x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_4} +$$

$$+ \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1x_2\left(\overline{x_3} + \overline{x_4}\right) + x_3x_4\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) =$$

$$= x_1x_2\overline{x_3x_4} + x_3x_4\overline{x_1x_2} = x_1x_2 \oplus x_3x_4.$$

$$\overline{x_1x_2 \oplus x_3x_4}\left(x_3 \oplus x_4\right)\left(x_1 \oplus x_2\right) = \left(x_1x_2x_3x_4 \oplus \overline{x_1x_2}\,\overline{x_3x_4}\right)\left(x_3\overline{x_4} + \overline{x_3}x_4\right)\left(x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2\right) =$$

$$= \left(x_1x_2x_3x_4\overline{\overline{x_1x_2}}\,\overline{\overline{x_3x_4}} + \overline{x_1x_2x_3x_4}\,\overline{x_1x_2}\,\overline{x_3x_4}\right)\left(x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\right) =$$

$$= \left(x_1x_2x_3x_4\left(\overline{x_1x_2} + \overline{x_3x_4}\right) + \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right)\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right)\left(\overline{x_3} + \overline{x_4}\right)\right) \times \begin{pmatrix} x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \\ + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1x_2x_3x_4\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right) + \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right)\left(\overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4}\right)\right) \times$$

$$\times\left(x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right)\left(\overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4}\right) \times \begin{pmatrix} x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \\ + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \\ + \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\left(x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 \end{vmatrix} \left(x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 \end{vmatrix} \left(x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\right) =$$

$$= \left(\overline{x_1}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4}\right)\left(x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4\right) =$$

$$= \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{x_1}x_2\left(x_3 \oplus x_4\right) + x_1\overline{x_2}\left(x_3 \oplus x_4\right) = \left(x_3 \oplus x_4\right)\left(\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}\right) = \left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_3 \oplus x_4\right).$$

Отже,

$$S_1 = (x_1x_2 \oplus x_3x_4) + (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4).$$

Система рівнянь (27) набуває вигляду:

$$\begin{cases} S_0 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4; \\ S_1 = x_1x_2 \oplus x_3x_4 + (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4); \\ S_2 = x_1x_2x_3x_4. \end{cases} \quad (30)$$

За системою рівнянь (30) будуємо схему 4-входового симетричного суматора бінарних кодів (рис. 3).

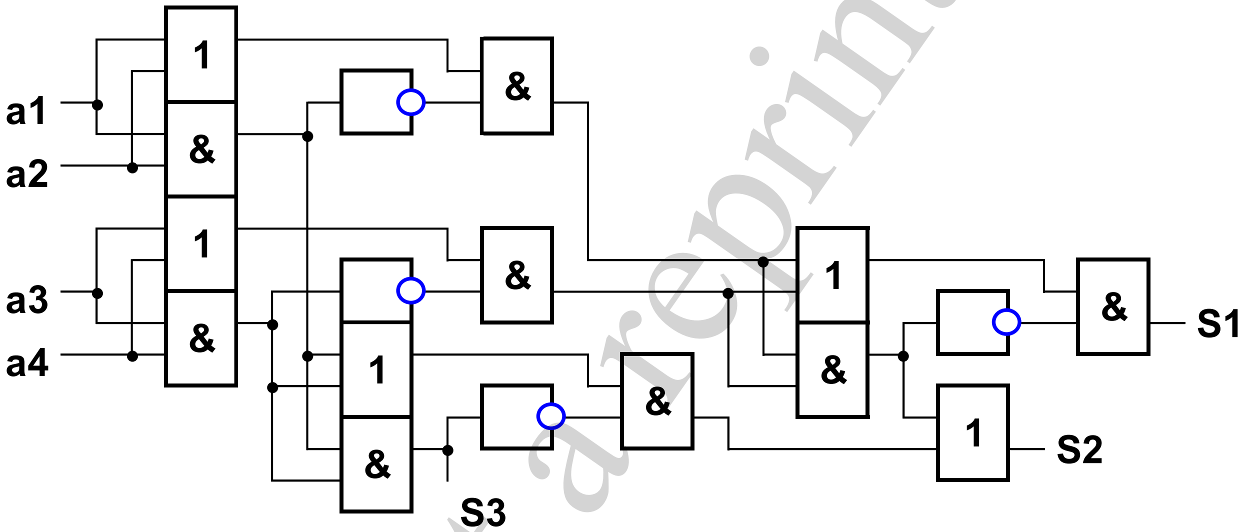


Рис. 3. Симетричний 4-входовий суматор бінарних кодів

Схема 4-входового симетричного суматора на рис. 3 є оптимальною, проходить верифікацію таблицею істинності (табл. 5), має меншу складність, порівняно зі схемами відкритих патентів СРСР [37–44] про симетричні 4-входові суматори.

6. Обговорення результатів мінімізації симетричних булевих функцій методом образних перетворень

Математичний апарат мінімізації булевих функцій методом образних перетворень розглянуто у роботах [25, 26, 45–50] та ін. Технологія методу образних перетворень представлена у табл. 6.

Таблиця 6

Технологія методу образних перетворень

1	Бінарні комбінаторні системи з повторенням 2-(*n*, *b*)-design, 2-(*n*, *x*/*b*)-design

2	Вербальне і образне представлення інформації
3	Логічна операція супер-склеювання змінних
4	Логічна операція неповного супер-склеювання змінних
5	Герменевтика логічних операцій на бінарних еквівалентах логічних функцій
6	Протоколи образних перетворень
7	Ознака мінімальної логічної функції,
8	Мінімізація булевих функцій на повній таблиці істинності
9	Алгоритм аналітичного методу та його автоматизація
10	Поширення аналітичного методу на інші логічні базиси
11	Алгебра рівносильного перетворення у класі досконалих нормальних форм функцій алгебри Шеффера
12	Алгебра рівносильного перетворення у класі досконалих імплікативних нормальних форм
13	Відносно складні алгоритми застосування логічних операцій поглинання та супер-склеювання змінних
14	Стек логічних операцій
15	Алгоритми спрощення функції з процедурою вставки двох однакових кон'юнктермів ПНФ з наступною операцією супер-склеювання змінних
16	Сингулярна функція
17	Алгебра рівносильного перетворення у класі поліномних нормальних форм булевих функцій
18	Змішаний базис

Новою складовою технології мінімізації булевих функцій методом образних перетворень (МОП) є рівносильні перетворення поліномної нормальної форми (ПНФ) (п. 5. 1). Вигляд рівносильних перетворень (п. 5. 1, табл. 2, 3) подібний розкладанню аналітичної функції на множники, у даному випадку методом вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Рівносильні перетворення ПНФ (п. 5. 1, табл. 2) можуть бути об'єктом для порівняння, до певної міри, з правилами мінімізації на основі розчеплення кон'юнктермів у поліномному теоретико-множинному форматі (ПТМФ) [29] (табл. 7).

Таблиця 7
Сучасні рівносильні перетворення кон'юнктермів у поліномному форматі

Функція	Теоретико-множинні правила розчеплення кон'юнктермів ПНФ	Рівносильні перетворення кон'юнктермів ПНФ МОП
$\begin{pmatrix} 000 \\ 111 \end{pmatrix}^{\oplus}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 00- \\ 0-1 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 00- \\ -01 \\ 1-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0-0 \\ -10 \\ 11- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0-0 \\ 01- \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -00 \\ 10- \\ 1-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -00 \\ 1-0 \\ 11- \end{pmatrix} \right\}$	$\left(\overline{x_1} \oplus x_2\right)\left(\overline{x_1} \oplus x_3\right)$

Продовження Таблиці 7

	$\begin{pmatrix}0000\\1111\end{pmatrix}^{\oplus}$	$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}000-\\00-1\\0-11\\-111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}000-\\00-1\\-011\\1-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}000-\\0-01\\-101\\11-1\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}000-\\0-01\\01-1\\-111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}000-\\-001\\10-1\\1-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}000-\\-001\\1-01\\11-1\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}00-0\\0-10\\-110\\111-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00-0\\0-10\\011-\\-111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00-0\\-010\\101-\\1-11\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}00-0\\-010\\1-10\\111-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00-0\\001-\\0-11\\-111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00-0\\001-\\-011\\1-11\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}0-00\\-100\\110-\\11-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-00\\-100\\11-0\\111-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-00\\010-\\01-1\\-111\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}0-00\\010-\\-101\\11-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-00\\01-0\\-110\\111-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-00\\01-0\\011-\\-111\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}-000\\100-\\10-1\\1-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-000\\100-\\1-01\\11-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-000\\10-0\\1-10\\111-\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}-000\\10-0\\101-\\1-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-000\\1-00\\110-\\11-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-000\\1-00\\11-0\\111-\end{pmatrix} \end{array}\right\}$	$\left(\overline{x_1}\oplus x_2\right)\left(\overline{x_1}\oplus x_3\right)\left(\overline{x_1}\oplus x_4\right)$

Продовження Таблиці 7

$\begin{pmatrix}0000\\0111\end{pmatrix}^{\oplus}$	$\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}000-\\00-1\\0-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}000-\\0-01\\01-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}00-0\\0-10\\011-\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}00-0\\001-\\0-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-00\\010-\\01-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-00\\01-0\\011-\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$	$\overline{x}_1\left(\overline{x_2\oplus x_3}\right)\left(\overline{x_2\oplus x_4}\right)$
$\begin{pmatrix}000-\\0110\end{pmatrix}^{\oplus}$	$\begin{pmatrix}00--\\0-1-\\0111\end{pmatrix}$	$\overline{x}_1\left(\overline{x_2\oplus x_3}\right)\left(\overline{x}_2+\overline{x}_4\right)$

Особливість застосування теоретико-множинних правил розщеплення кон’юнктермів ПНФ [29] полягає у тому, що утворені, за процедурою розщеплення, кон’юнктерми меншого рангу можуть бути спрощені за правилами рівносильного перетворення з іншими кон’юнктермами заданої функції. У такому випадку булева функція буде оптимізована [29].

Як видно з табл. 7, кон’юнктерми виду

$$\begin{pmatrix}000\\111\end{pmatrix}^{\oplus},\ \begin{pmatrix}0000\\1111\end{pmatrix}^{\oplus},\ \begin{pmatrix}0000\\0111\end{pmatrix}^{\oplus} \qquad (31)$$

безпосередньо методом розщеплення кон’юнктермів не спрощуються.

Кон’юнктерми (31) можна спростити за допомогою процедури вставки однакових кон’юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних (п. 5. 1, табл. 2). Утворені логічні вирази, після такої процедури, можуть бути спрощені за правилами рівносильного перетворення з іншими термами заданої функції. (п. 5. 3, приклад 8). Виявлення зазначеного алгоритму складає резерв для нарощення апаратних можливостей мінімізації симетричних булевих функцій візуально-матричною формою аналітичного методу.

Методом розщеплення кон’юнктермів можна спростити кон’юнктерми виду $\begin{pmatrix}000-\\0110\end{pmatrix}^{\oplus}$ (табл. 7), застосовуючи логічну операцію поліномного поглинання змінних [26]:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \hline 0 & 0 & 0 & -\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ \hline\end{array} = \begin{vmatrix}0 & 0 & - & -\\ 0 & - & 1 & -\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \overline{x}_1\overline{x}_2\oplus\overline{x}_1x_3\oplus\overline{x}_1x_2x_3x_4 = \overline{x}_1\overline{x}_2\oplus\overline{x}_1x_3\overline{x_2x_4} =$$

$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\oplus\overline{x}_1x_3\left(\overline{x}_2+\overline{x}_4\right) = \overline{x}_1\left(\overline{x}_2\oplus x_3\left(\overline{x}_2+\overline{x}_4\right)\right).$$

Результатом такого спрощення виразу $\begin{pmatrix} 000- \\ 0110 \end{pmatrix}^{\oplus}$ є 5-рівнева логіка з ціною реалізації:

$$k_l / k_{in} = 5/4.$$

У свою чергу вираз $\overline{x_1}\left(\overline{x_2 \oplus x_3}\right)\left(\overline{x_2} + \overline{x_4}\right)$ (табл. 7), що отриманий за процедурою вставки однакових кон’юнктермів з наступною операцією суперсклеювання змінних, представляє 3-рівневу логіку з ціною реалізації:

$$k_l / k_{in} = 5/4.$$

МОП забезпечує мінімізацію симетричних булевих функцій в основному базисі $\{\vee, \wedge, \neg\}$ (п. 5. 2, приклади 4, 5, 6). Однак не всі симетричні функції у ДДНФ або ДКНФ мінімізуються у базисі Буля. У такому випадку потрібно робити спроби оптимізації заданої функції у поліномному базисі $\{\wedge, \oplus, 1\}$, застосовуючи алгебру Ріда – Маллера [26] (п. 5. 3, приклади 7, 8).

МОП передбачає аналіз стеку логічних операцій [49], який є певним аналогом і відмінністю від декомпозиції (п. 5. 4). Стек дає змогу вибору перспективного за складністю варіанту спрощення заданої функції. За даними, що є у нашому розпорядженні (приклади 9 і 10), можна зазначити, що результати спрощення функцій методом образних перетворень та методами декомпозиції співпадають, однак МОП є суттєво простішим. Мінімізація двома методами для більшого, до певної міри, числа змінних дасть свої відповідні висновки. У роботі [49] представлена мінімізація булевої функції методом образних перетворень на 64 вхідних змінних.

Належне виведення моделі симетричного 4-входового суматора бінарних кодів (п. 5. 5, система рівнянь 30) аналітичним методом забезпечується впровадженням апарату рівносильних образних перетворень для мінімізації булевих функцій. Порядок взаємного розташування елементів бінарної матриці, однаковий при алгебричному підході, відіграє суттєву роль при візуальному сприйнятті двовимірних даних. Логічна схема 4-входового симетричного суматора на рис. 3 є оптимальною, має меншу складність, порівняно зі схемами відкритих патентів СРСР [37–44] про симетричні 4-входові суматори.

У табл. 8 представлені результати мінімізації симетричних булевих функцій, запозичених з робіт інших авторів та аналітичного методу.

Особливістю методу образних перетворень є те, що метод ґрунтується на бінарних комбінаторних системах з повторенням 2-(*n*, *b*)-design, 2-(*n*, *x/b*)-design, якими є власне таблиці істинності заданих функцій, наприклад табл. 1, 4, 5. Зазначені об’єкти 2-(*n*, *b*)-design, 2-(*n*, *x/b*)-design є достатнім апаратним ресурсом для мінімізації симетричних булевих функцій, який дозволяє обходитись без допоміжних об’єктів, як то карти Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, ненаправлений граф, таблиці покриття, куби та ін. Наглядність 2-

вимірних бінарних матриць дозволяє здійснювати ручний спосіб спрощення симетричних булевих функцій (з використанням математичного редактора, наприклад MathType 7.4.0 (США) у межах до 64 вхідних змінних [49] для ДДНФ (ДКНФ) представлення функції.

Таблиця 8
Порівняльна таблиця прикладів мінімізації симетричних булевих функцій, запозичених з робіт інших авторів та візуально-матричної форми аналітичного методу

№ прикладу	Назва методу мінімізації	Число вхідних змінних	Результат мінімізації	Результат аналітичного методу
3	Метод розчеплення кон'юнктермів [29]	4	9 літералів	7 літералів
4	Аналітичний метод [27]	3	6 літералів	4 літерали
5	Карта Карно [27]	4	12 літералів	9 літералів
6	Аналітичний метод [30]	3	6 літералів	4 літерали
8	Карта Карно [32]	4	15 літералів	8 літералів
9	Метод декомпозиції [36]	3	Результати мінімізації співпадають	
10	Метод декомпозиції [37]	3	Результати мінімізації співпадають	
11	Карта Карно [52]	4	6 літералів	5 літералів

Застосування МОП для мінімізації симетричних функцій у базисах Буля та Ріда–Маллера виводить, до певної міри, проблему спрощення симетричних булевих функцій на рівень добре дослідженої задачі у класі диз'юнктивно-кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ) булевих функцій.

Застосування елементного базису лише однієї функціонально повної системи перемикальних функцій у загальному випадку не забезпечує умов отримання оптимальної комбінаційної схеми. У зв'язку з цим доцільно застосувати змішаний базис.

Приклад 11. Методом образних перетворень спростити булеву функцію з частковою симетрією, що задана у канонічній формі (32) [51].

$$f=(5,6,7,8,9,10,11). \qquad (32)$$

Рішення:

Функція (32) частково симетрична. Перестановка змінних з індексами (3,4) не змінює значення функції (32).

Спрощення функції (32) проведемо у кон'юнктивній нормальній формі [50].

$$
f_{\min}=\left|\begin{array}{c|cccc|}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & 0 & 0 & 1 & 1\\
4 & 0 & 1 & 0 & 0\\
12 & 1 & 1 & 0 & 0\\
13 & 1 & 1 & 0 & 1\\
14 & 1 & 1 & 1 & 0\\
15 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right.=\left|\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}
1 & 1 & & \\
1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & &
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}
1 & 1 & & \\
1 & & 1 & 1\\
0 & 0 & &
\end{array}\right|=
$$

$$
=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1+x_3+x_4\right)\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}\right)=\left(x_1\overline{x_2}+\overline{x_1}x_2\right)\left(x_1+x_3+x_4\right)=\left(x_1\oplus x_2\right)\left(x_1+x_3+x_4\right).
$$

$f_{\min}$ у змішаному базисі буде мати вигляд (33):

$$
f_{\min}=\left(x_1\oplus x_2\right)\left(x_1+x_3+x_4\right). \tag{33}
$$

Функція (33) представляє 2-рівневу логіку. Ціна реалізації $f_{\min}$ (33) у змішаному базисі становить

$$
k_\theta / k_l / k_{in} = 2/5/0,
$$

що на один літерал менше, порівняно з [51].

Мінімальна функція (33) залишається частково симетричною. Перестановка змінних з індексами (3,4) не змінює значення мінімальної функції.

Обмеженням застосування методу образних перетворень є випадки, коли перемикальна функція представлена у змішаному базисі. У цьому випадку функцію необхідно представити одним логічним базисом.

Слабка сторона розглянутого методу полягає у його малому практичному застосуванні для мінімізації симетричних булевих функцій з подальшим проектуванням та виготовленням відповідних обчислювальних компонентів. Негативні внутрішні фактори МОП пов'язані з додатковими часовими витратами на встановлення протоколів спрощення симетричних логічних функцій у базисах Буля та Ріда–Маллера з подальшим створенням бібліотеки протоколів, що мають ілюстрацію відповідних образних перетворень.

Перспективою подальших досліджень може бути пошук нових правил перетворення мажоритарних логічних функцій та їх мінімізація.

7. Висновки

1. Встановлені результати рівносильних перетворень поліномної нормальної форми булевих функцій методом вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних. Вирази, що отримані, зазначе-

них перетворень можуть бути об'єктами для порівняння, до певної міри, з правилами мінімізації на основі розчеплення кон'юнктермів у поліномному теоретико-множинному форматі (ПТМФ). Відмінність рівносильних перетворень ПНФ булевих функцій методом вставки однакових кон'юнктермів від відомих методів полягає у тому, що такі перетворення дають змогу узагальнювати результат мінімізації та виводити нові рівносильні перетворення на основі апарату індукції.

Ефективність методу вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних для мінімізації симетричних булевих функцій підтверджується прикладами 3, 8 мінімізації 4-розрядних булевих функцій.

2. Особливість мінімізації симетричних булевих функцій полягає у тому, що не всі такі функції спрощуються у ДДНФ або ДКНФ основного базису $\{\vee, \wedge, \neg\}$. У випадку відсутності мінімізації заданої функції в основному базисі потрібно робити спроби оптимізації функції у поліномному базисі $\{\wedge, \oplus, 1\}$, застосовуючи алгебру Ріда – Маллера.

Відмінністю методу образних перетворень є те, що метод ґрунтується на бінарних комбінаторних системах з повторенням 2-(n, b)-design, 2-(n, x/b)-design, математичний апарат яких є достатній ресурсом для мінімізації симетричних булевих функцій. Це дозволяє обходитись без допоміжних об'єктів, як то карти Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, ненаправлений граф, таблиці покриття, куби та ін. Інтерпретація результату полягає у тому, що не існує симетричних логічних функцій (крім мінімальних), яких неможливо спростити.

Ефективність методу образних перетворень для мінімізації симетричних булевих функцій в основному базисі підтверджується прикладами 4, 6 (мінімізація 3-розрядних частково симетричних булевих функцій); прикладом 5 (мінімізація 4-розрядної частково симетричної булевої функції).

3. Алгебричний апарат поліномного базису дає змогу впроваджувати метод образних перетворень для мінімізації симетричних булевих функцій у базисі Ріда – Маллера $\{\wedge, \oplus, 1\}$. Особливістю спрощення симетричних булевих функцій поліномного базису є те, що функція має бути сингулярною, якщо тільки вона не задана іншим способом. Відмінність мінімізації симетричних поліномних функцій МОП від відомих методів полягає у наявності процедури вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних. Це розширює варіанти оптимізації, що дає збільшення ефективності процедури мінімізації симетричних булевих функцій ПНФ методом образних перетворень. Інтерпретація результату полягає у тому, що технологія спрощення поліномних функцій допускає у ході рівносильних перетворень переходи від алгебри Ріда–Маллера до алгебри Буля і навпаки.

Ілюстративний (образний) опис наглядний, що дозволяє подати одночасно систему відношень між окремими змінними задачі. Таким чином, образна форма інформації у вигляді комбінаторних об'єктів забезпечує більші шанси визначити алгоритм мінімізації булевих функцій. Комбінаторними об'єктами у цьому випадку є 2-вимірні бінарні матриці 2-(n, b)-design, або неповних 2-(n, x/b)-design і суть власне комбінаторні образи. У підсумку вербальні процедури алгебричних перетворень замінюються рівносильними образними перетвореннями.

Ефективність методу образних перетворень для мінімізації симетричних булевих функцій у поліномному базисі підтверджується прикладами 7, 8 (мінімізація 4-розрядних частково симетричних булевих функцій).

4. Результати спрощення функцій порівняльних прикладів методом образних перетворень та методами декомпозиції співпадають, однак процедура методу образних перетворень є суттєво простішою. Інтерпретація результату спрощення булевої функції, зокрема полягає у наявності методу вставки однакових кон'юнктермів з наступною операцією супер-склеювання змінних.

Ефективність методу образних перетворень, у порівнянні з методами декомпозиції, для мінімізації симетричних булевих функцій підтверджується прикладом 9 (мінімізація 4-розрядної частково симетричної булевої функції; прикладом 10 (мінімізація 3-розрядної частково симетричної булевої функції).

5. Належна оптимізація логічної структури симетричного 4-входового суматора бінарних кодів аналітичним методом підтверджується впровадженням апарату рівносильних образних перетворень для мінімізації булевих функцій. Отримана логічна схема 4-входового симетричного суматора є оптимальною, має меншу складність, порівняно зі схемами відкритих патентів СРСР про симетричні 4-входові суматори.

Література

1. Shannon, C. E. (1938). A symbolic analysis of relay and switching circuits. Electrical Engineering, 57 (12), 713–723. doi: https://doi.org/10.1109/ee.1938.6431064

2. Авгуль, Л. Б., Петроченко, А. С. (1989). Декомпозиция симметрических булевых функций и булевых функций с частичной симметрией в базисе монотонных функций. Кибернетика и системный анализ, 3, 26–40.

3. Sasao, T. (1993). FPGA Design by Generalized Functional Decomposition. Logic Synthesis and Optimization, 233–258. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3154-8_11

4. Свирщева, Э. А. (1988). Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. Харьков, 256. URL: http://www.techlibrary.ru/b1/2z1c1j1r2a1f1c1a_3l.2h._2z1t1r1u1l1t1u1r1o2c1k_1s1j1o1t1f1i_1o1f1j1i1p1n1p1r1v1o2c1w_1s1j1s1t1f1n_1s_1p1e1o1p1r1p1e1o2c1n1j_1l1p1n1q1p1o1f1o1t1a1n1j._1998.pdf

5. Рицар, Б. Є. (1996). До формалізації симетричних логічних функцій n змінних. Матеріали міжнар. конф. "Сучасні проблеми автоматизованої обробки і виробництва радіоелектронних засобів застосування засобів зв'язку". Ч. 2. Львів-Славськ, 28–30.

6. Рицар, Б. Є. (1999). Декомпозиція булових функцій методом q-розбиття. Управляющие системы и машины, 5, 29–42.

7. Поваров, Г. Н. (1960). О групповой инвариантности булевых функций. Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР. URL: https://www.twirpx.com/file/2906517/

8. Mukhopadhyay, A. (1963). Detection of Total or Partial Symmetry of a Switching Function with the Use of Decomposition Charts. IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-12 (5), 553–557. doi: https://doi.org/10.1109/pgec.1963.263654

9. Das, S. R., Sheng, C. L. (1971). On Detecting Total or Partial Symmetry of Switching Functions. IEEE Transactions on Computers, C-20 (3), 352–355. doi: https://doi.org/10.1109/t-c.1971.223243

10. Лупанов, О. Б. (1965). Об одном подходе к синтезу управляющих систем - принципе локального кодирования. Проблемы кибернетики, 14, 31–110. URL: http://new.math.msu.su/department/dm/dmmc/publ_4.htm

11. Авгуль, Л. Б. (1996). Полиномиальное разложение симметрических булевых функций табличным методом. Кибернетика и системный анализ, 6, 59–71.

12. Рыцар, Б. Е. (1997). Метод минимизации булевых функций. Проблемы управления и информатики, 2, 100–113.

13. Паулин, О. Н., Ляховецкий, А. М. (2002). Модель и метод проектирования многооперандного сумматора на базе симметрических функций. Тр. междунар. конф. по индуктивному моделированию «МКИМ – 2002». Львов, 208–213.

14. Паулин, О. Н., Дрозд, Ю. В. (1998). О синтезе логических модулей, описываемых симметрическими функциями. Мат-лы междунар. НТК «Приборостроение». Евпатория, 189–192.

15. Schnieber, M., Froehlich, S., Drechsler, R. Depth Optimized Synthesis of Symmetric Boolean Functions. URL: http://www.informatik.uni-bremen.de/agra/doc/konf/2021_ISVLSI_SymmetricFunctions.pdf

16. Burmistrov, S. V., Panasco, O. M., Kovalska, N. V. (2018). Matrix method of parallel decomposition for minimization of symmetric boolean functions in the form of extended polynomial. Bulletin of Cherkasy State Technological University, 1, 130–135. doi: https://doi.org/10.24025/2306-4412.1.2018.162604

17. Papakonstantinou, G. (2014). A parallel algorithm for minimizing esop expressions. Journal of Circuits, Systems and Computers, 23 (01), 1450015. doi: https://doi.org/10.1142/s0218126614500157

18. Brandão, L. T. A. N., Çalık, Ç., Sönmez Turan, M., Peralta, R. (2019). Upper bounds on the multiplicative complexity of symmetric Boolean functions. Cryptography and Communications, 11 (6), 1339–1362. doi: https://doi.org/10.1007/s12095-019-00377-3

19. Zhang, J. S., Mishc, A., Brayton, R., Chrzanowska-Jeske, M. (2006). Symmetry detection for large Boolean functions using circuit representation, simulation, and satisfiability. 2006 43rd ACM/IEEE Design Automation Conference. doi: https://doi.org/10.1109/dac.2006.229269

20. Drechsler, R., Becker, B. (1995). Sympathy: fast exact minimization of fixed polarity Reed-Muller expressions for symmetric functions. Proceedings the European Design and Test Conference. ED&TC 1995. doi: https://doi.org/10.1109/edtc.1995.470414

21. Drechsler, R. (1997). Pseudo Kronecker expressions for symmetric functions. Proceedings Tenth International Conference on VLSI Design. doi: https://doi.org/10.1109/icvd.1997.568188

22. Möller, D., Molitor, P., Drechsler, R. (1995). Symmetry Based Variable Ordering for ROBDDs. Logic and Architecture Synthesis, 70–81. doi: https://doi.org/10.1007/978-0-387-34920-6_7

23. Arnold, R. F., Harrison, M. A. (1963). Algebraic Properties of Symmetric and Partially Symmetric Boolean Functions. IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-12 (3), 244–251. doi: https://doi.org/10.1109/pgec.1963.263535

24. Rytsar, B. Y. (2003). Identification of symmetry of boolean function decomposition cloning method. 6th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service, 2003. TELSIKS 2003. doi: https://doi.org/10.1109/telsks.2003.1246296

25. Solomko, M. (2021). Developing an algorithm to minimize boolean functions for the visual-matrix form of the analytical method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (109)), 6–21. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.225325

26. Solomko, M., Batyshkina, I., Khomiuk, N., Ivashchuk, Y., Shevtsova, N. (2021). Developing the minimization of a polynomial normal form of boolean functions by the method of figurative transformations. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2 (4 (110)), 22–37. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229786

27. Паулин, О. Н., Янко, В. Г. (2014). О минимизации симметрических булевых функций. Конференция «Modern Problems And Ways Of Their Solution In Science, Transport, Production And Education 2014». SWorld.

28. Рицар, Б. Є. (2013). Числова теоретико-множинна інтерпретація полінома Жеґалкіна. Управління системами і машинами, 1, 11–26. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/83125

29. Rytsar, B. Ye. (2015). New minimization method of logical functions in polynomial set-theoretical format. 1. Generalized rules of conjuncterms simplification. Управляющие системы и машины, 2, 39–57. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/87194

30. Яблонский, С. В. (1986). Введение в дискретную математику. М.: Наука, 384. URL: https://stugum.files.wordpress.com/2014/03/yablonskiy-vvedenie-v-diskretnuyu-matematiku.pdf

31. Rytsar, B. Y. (2019). A New Method for Symmetry Recognition in Boolean Functions Based on the Set-Theoretical Logic Differentiation. I. Control Systems and Computers, 4 (282), 3–13. doi: https://doi.org/10.15407/csc.2019.04.003

32. Tran, A. (1987). Graphical method for the conversion of minterms to Reed-Muller coefficients and the minimisation of exclusive-OR switching functions. IEE Proceedings E Computers and Digital Techniques, 134 (2), 93. doi: https://doi.org/10.1049/ip-e.1987.0016

33. Закревский, А. Д. (1981). Логический синтез каскадных схем. М., 416. URL: https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=272497

34. Баркалов, А. А., Красичков, А. А. (2002). Методы декомпозиции булевых функций. Наукові праці ДонНТУ, 39, 116–121.

35. Рыцар, Б. Э. (2009). Новый подход к декомпозиции булевых функций. 4. Неразделительная декомпозиция: Метод p,q-разбиения. Кибернетика и системный анализ, 3, 15–41. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/44365

36. Рицар, Б. Є. (2013). Мінімізація системи логікових функцій методом паралельного розчеплення кон’юнктермів. Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Радіоелектроніка та телекомунікації, 766, 18–27. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VNULPPT_2013_766_6

37. Витер, В. В., Гурьянов, А. В., Козюминский, В. Д., Мищенко, В. А., Терешко, С. М. (1984). Пат. № 1228099 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 3696344; заявл. 30.01.1984; опубл. 30.04.1986. URL: http://patents.su/3-1228099-chetyrekhvkhodovyjj-odnorazryadnyjj-summator.html

38. Авгуль, Л. Б., Дубовик, Ю. И., Супрун, В. П., Якуш, В. П. (1986). Пат. № 1374216 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4098636; заявл. 30.07.1986; опубл. 15.02.1988. URL: https://patents.su/3-1374216-chetyrekhvkhodovyjj-odnorazryadnyjj-summator.html

39. Авгуль, Л. Б., Супрун, В. П. (1987). Пат. № 1429108 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4195013; заявл. 17.02.1987; опубл. 07.10.1988. URL: http://patents.su/3-1429108-chetyrekhvkhodovyjj-odnorazryadnyjj-summator.html

40. Анисимова, Л. О., Земцова, Н. К., Мутихина, О. И., Хлыстов, А. В., Чижухин, Г. Н. (1987). Пат. № 1524045 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4238062; заявл. 04.05.1987; опубл. 23.11.1989. URL: https://patents.su/2-1524045-chetyrekhvkhodovyjj-odnorazryadnyjj-summator.html

41. Авгуль, Л. Б., Супрун, В. П. (1987). Пат. № 1479928 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4306252; заявл. 14.09.1987; опубл. 15.05.1989. URL: https://patents.su/2-1479928-chetyrekhvkhodovyjj-odnorazryadnyjj-summator.html

42. Авгуль, Л. Б., Супрун, В. П. (1988). Пат. № 1575172 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4404427; заявл. 05.04.1988; опубл. 30.06.1990. URL: https://patents.su/2-1575172-chetyrekhvkhodovyjj-odnorazryadnyjj-summator.html

43. Авгуль, Л. Б., Супрун, В. П. (1988). Пат. № 1658145 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4476179; заявл. 26.08.1988; опубл. 23.06.1991. URL: https://findpatent.ru/patent/165/1658145.html

44. Чижухин, Г. Н. (1989). Пат. № 1683007 СССР. Четырехвходовый одноразрядный сумматор. № 4746424; заявл. 02.10.1989; опубл. 07.10.1991. URL: https://patents.su/2-1683007-chetyrekhvkhodovojj-odnorazryadnyjj-summator.html

45. Riznyk, V., Solomko, M. (2017). Application of super-sticking algebraic operation of variables for Boolean functions minimization by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 6 (2 (38)), 60–76. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.118336

46. Riznyk, V., Solomko, M. (2018). Research of 5-bit boolean functions minimization protocols by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 4 (2(42)), 41–52. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.140351

47. Riznyk, V., Solomko, M., Tadeyev, P., Nazaruk, V., Zubyk, L., Voloshyn, V. (2020). The algorithm for minimizing Boolean functions using a method of the optimal combination of the sequence of figurative transformations. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3 (4 (105)), 43–60. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.206308

48. Solomko, M., Khomiuk, N., Ivashchuk, Y., Nazaruk, V., Reinska, V., Zubyk, L., Popova, A. (2020). Implementation of the method of image transformations for minimizing the Sheffer functions. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5 (4 (107)), 19–34. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.214899

49. Riznyk, V., Solomko, M. (2017). Minimization of Boolean functions by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 4 (2 (36)), 49–64. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.108532

50. Riznyk, V., Solomko, M. (2018). Minimization of conjunctive normal forms of boolean functions by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 5 (2 (43)), 42–55. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.146312

51. Лобанов, В. И. (2002). Русская логика против классической (азбука математической логики). М.: Спутник+, 113. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_002095987/